Universität Bielefeld

Technische Fakultät
AG Neuroinformatik
Robert Haschke

Übungen zu "Autonomous Grasping"
WS 2017/18 Blatt 1

Abgabe: 20.10.2017

Aufgabe 1.1, Das Kreuzprodukt: Überprüfen Sie folgende Identitäten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b} \qquad \text{wobei} \qquad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\omega} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$$

$$\hat{\omega}^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^t - \|\vec{\omega}\|^2 \mathbf{1}$$

$$\hat{\omega}^3 = -\|\vec{\omega}\|^2 \cdot \hat{\omega}$$

Aufgabe 1.2, Das Matrixexponential: Angenommen $\vec{\omega}$ habe Einheitslänge ($\|\vec{\omega}\| = 1$). Zeigen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung von $\sin$ und $\cos$:

$$\mathrm{e}^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{1} + \hat{\omega}\theta + \frac{(\hat{\omega}\theta)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}\theta)^3}{3!} + \dots \tag{1}$$

$$= \mathbf{1} + \hat{\omega} \sin\theta + \hat{\omega}^2 (1 - \cos\theta)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine allgemeine Formel für die geraden und ungeraden Potenzen von $\hat{\omega}$ her.

Aufgabe 1.3, Quaternionen:
Durch das Einheits-Quaternion $Q = (q_0, \vec{q}) = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\,\vec{\omega})$ – das heißt $\|Q\| = 1$ und $\|\vec{\omega}\| = 1$ – kann eine Rotation um die Achse $\vec{\omega}$ und den Winkel θ beschrieben werden.

a) Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird das reine Quaternion $X = (0, \vec{x})$ definiert, d.h. der skalare Anteil ist Null. Zeigen Sie zunächst

$$Q \cdot X \cdot Q^* \quad = \quad \left(0,\ (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2) \cdot \vec{x} + 2\,(q_0(\vec{q} \times \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{q})\,\vec{q})\right) \quad = \quad (0, \vec{x}')\,.$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist also wieder ein reines Quaternion.

b) Zeigen Sie weiter, dass der Vektoranteil $\vec{x}'$ dieses so erhaltenen reinen Quaternions dem Vektor entspricht, der durch Rotation von $\vec{x}$ um die Achse $\vec{\omega}$ und den Winkel θ entsteht:

$$Q \cdot X \cdot Q^* = (0, R(\vec{\omega}, \theta) \cdot \vec{x}) = (0, \cos\theta \vec{x} + \sin\theta (\vec{\omega} \times \vec{x}) + (1 - \cos\theta)(\vec{x} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} \qquad \text{(Rodrigues-Formel)}\,.$$

Sie benötigen dafür folgende Additionstheoreme:

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha\ \cos\alpha$