Autonomes Greifen

14.10.11

1. Screw Theorie

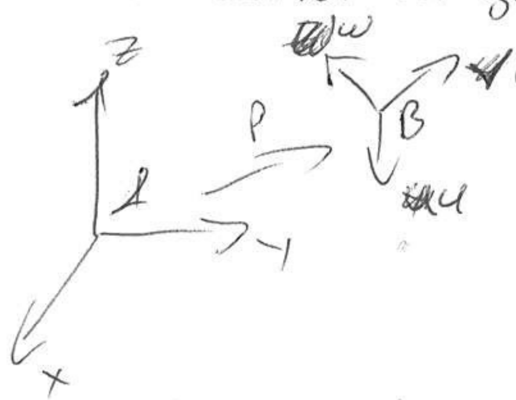
Def: Ein fester Körper ist eine Menge von Punkten, deren relative Lage sich nicht ändert.

Die Menge $SE(3)$ die die Lage eines festen Körpers beschreibt, ist offenbar eine gekrümmte Mannigfaltigkeit.

- $\forall g,h \in SE(3): g \circ h,\ h \circ g \in SE(3)$
- assoziativ $(g \circ h) \circ l = g \circ (h \circ l)$
- nicht kommutativ: $g \circ h \neq h \circ g$
- identität: $e: g \circ e = e \circ g = g \ \forall g$
- inverse: $\forall g \ \exists h: g \circ h = h \circ g = e$

Distanzmaße auf $SE(3)$: gibt es nicht!

- zwei Bestandteile: Rotation/Translation
- man muss bestimmte Gewichtung beider Komponenten festlegen



$$T_{AB} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w & p_x \\ y_u & y_v & y_w & p_y \\ z_u & z_v & z_w & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{AB} & p_{AB} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{q} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ 1 \end{pmatrix}$$

interpretiere auf zwei Arten:

a) $\bar{q}_a = T_{ab} \bar{q}_b$, $\vec{q}_a = R_{ab} \vec{q}_b + \vec{p}_{ab}$

Transformation von Koordinaten eines Punktes q

Autonomes Greifen 14.10.11

b) T_{ab} kann als Bewegung aufgefasst werden $T_{ab}: A \to A$

$$\bar{q}_a = T_{ab}\, q_a$$

1.2 Repräsentation von Rotationen

Def: Die Menge $SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid R R^T = \mathbb{1} \text{ und } \det R = 1\}$ heißt spezielle orthogonale Gruppe.
= Menge der Rotationsmatrizen, die die Händigkeit von KS erhalten (keine Spiegelung)

1.2.2 Euler ZYZ-Winkel

Jede Rotation kann durch 3 aufeinander folgende Rotationen um 3-Verschiedene Achsen erreicht werden.

1. Rotation um Z-Achse mit Winkel α:

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rotation um Y-Achse (neue) mit Winkel β: $R_{y,\beta}$
3. Rotation um Z-Achse (neue) mit Winkel γ: $R_{z,\gamma}$

$$R_{ab} = R_{z,\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\gamma}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R \in SO(3)$ surjektiv

Singularität: $R = \mathbb{1}$ $\beta = 0$ $\alpha = -\gamma$

Autonomes Greifen 14.10.11

1.2.3 Euler ZYX-Winkel (roll-pitch-yaw)

1. $R_{x,\psi}$ (yaw)
2. $R_{y,\theta}$ (pitch)
3. $R_{z,\phi}$ (roll)

Es wird um die alten Achsen gedreht (Welt-KS) gedreht.

$$R_{ab} = R_{z,\phi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{x,\psi}$$

Abbildung is surjektiv, Singularität: $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

1.2.4 Achsen-Winkel-Darstellung (axis-angle)

Satz (Euler): Jede Rotationsmatrix ist äquivalent zu einer Rotation um <u>einer</u> feste Achse $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und einem Drehwinkel $\theta \in [0, 2\pi)$

Bei $R=1$ gibt es wieder eine Singularität, da eine Drehung mit Winkel 0 mit jeder Drehachse identisch ist. Diese Singularität kann man verhindern, indem man $\vec{w} \cdot \theta$ betrachtet und den Drehwinkel mit der Norm $\|\vec{w}\|$ identifiziert.

1.2.5 Exponentielle Koordinaten

Wir betrachten eine Rotation um Achse $\vec{w}$ mit Winkel θ

$$\dot{q}(t) = \vec{w} \times \vec{q}(t) = \hat{\omega}\, q(t)$$

$$q(\theta) = \int_0^\theta \hat{\omega}\, q(t)\, dt = e^{\hat{\omega}\theta} \cdot q(0)$$

$$\left(e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbb{1} + \hat{\omega} \sin(\theta) + \hat{\omega}^2 (1 - \cos\theta)\right)$$

Autonomes Greifen

14.10.11

Notation: $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b}$ mit $\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{a} = -\hat{a}^T$

Es gelten Identitäten:

$$\hat{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega \times \omega = 0$$

$$\hat{\omega}^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^T - \|\omega\|^2 \cdot \mathbb{1}$$

$e^{\hat{\omega}\theta}$ ist die Exponentialfunktion einer Matrix:

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{\omega}\theta)^k \cdot \frac{1}{k!} = \mathbb{1} + \hat{\omega} \sin(\theta) + \hat{\omega}^2 (1 - \cos\theta)$$

<u>Definition:</u> Die Menge der anti-symmetrischen Matrizen nennen wir $so(3) = \{ S \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid S^T = -S \}$

$$so(3) \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} SO(3)$$

Autonomes Greifen

18.10.11

$$\hat{\omega} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
$$\hat{\omega} \in so(3) \overset{\exp}{\Rightarrow} e^{\hat{\omega}} = R \in SO(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$$
$$\hat{\omega} = -\hat{\omega}^T \qquad R^T R = \mathbb{1}, \det R = 1$$
$$\hat{\omega} \Longleftrightarrow \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3, \ \theta = \|\vec{\omega}\|$$

1.2.6 Quaternionen

Eine Rotation $R(\vec{\omega}, \theta) = e^{\hat{\omega}\theta}$ wird durch das Quaternion

$$Q = (\cos(\tfrac{1}{2}\theta), \vec{\omega} \sin(\tfrac{1}{2}(\theta))) = (q_0, \vec{q}) \in \mathbb{R}^4$$

$$\|Q\| = q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = \cos^2(\cdot) + \sin^2(\cdot) \cdot \underbrace{\|\vec{\omega}\|^2}_{1} = 1$$

$\Rightarrow$ Quaternionen, die Rotationen repräsentieren, haben Länge $\|Q\|^2 = 1$

$$Q = (q_0, \vec{q}) = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} \qquad q_i \in \mathbb{R}$$

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = -\hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{k}, \ \hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i}, \ \hat{k}\cdot\hat{i} = -\hat{i}\hat{k} = \hat{j}$$

$Q^* = (q_0, -q)$ – konjugiertes Quaternion

$$\|Q\|^2 = Q \cdot Q^* = Q^* \cdot Q = \sum_i q_i^2$$

$$\|Q\|^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

$$Q \cdot P = (q_0, \vec{q})(p_0, \vec{p}) = (q_0 \cdot p_0 - \vec{q}\cdot\vec{p}, q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{p})$$

$$Q \cdot (0, p) \cdot Q^* = (0, \underbrace{R(\vec{q}, q_0)}_{R(\vec{\omega}, \theta)} \vec{p})$$

$$R_{ab} \cdot R_{bc} = R_{ac}$$
$$Q_{ab} \cdot Q_{bc} = Q_{ac}$$

Autonomes Greifen

18.10.11

$R_0 \to R_1 \quad R_0 \cdot R_x = R_1 \quad R = R_0^{-1} \cdot R_1$

$Slerp(q_0, q_1, t) = q_0 \cdot (q_0^{-1}\ q_1)^t$

1.3 Twist-Koordinaten homogener Transformationen

Def: Die Menge $SE(3) = \left\{ \begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \vec{p} \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3) \right\}$ heißt spezielle euklidische Gruppe. Sie beschreibt die Menge aller Posen eines Körpers.

Def: Ein Element $\hat{\xi}$ der Menge $se(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \vec{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \hat{\omega} \in so(3) \right\}$ heißt Twist. Die Darstellung von $\hat{\xi}$ heißt 6 Dimensionaler Vektor $\vec{\xi} = (\vec{v}, \vec{\omega})$ nennen wir Twist-Koordinaten.

Die Menge der Twists beschreibt die Menge der Geschwindigk. von Körpern.

Satz: Für jeden $\hat{\xi} \in se(3)$ liefert $e^{\hat{\xi}}$ eine homogene Transformation aus $SE(3)$. $\hat{\xi} \in se(3) \overset{exp}{\mapsto} TM = e^{\hat{\xi}} \in SE(3)$

Satz: Für jeden $T \in SE(3)$ existiert ein Twist $\hat{\xi} \in se(3)$, so dass $e^{\hat{\xi}} = T$ gilt.

Autonomes Greifen 18.10.11

$$T_{ab}(\alpha) = \underline{T_R(\alpha)} \cdot T_{ab}(0)$$

$$T_R(\alpha) = T_{ab}(\alpha) \cdot T_{ab}(0)^{-1}$$

$$T_{ab}(0) = \begin{pmatrix} 1 & \begin{matrix} 0 \\ l_1+l_2 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{ab}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & \begin{matrix} 0 \\ -l_1-l_2 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -R\,p_0 = \begin{pmatrix} \sin\alpha\,(l_1+l_2) \\ -\cos\alpha\,(l_1+l_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R & p(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -p(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -R\cdot p_0 + p(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-R\,p_0 + p(\alpha) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\alpha - \cancel{2 l_2 \sin\alpha} \\ l_1 + \cancel{l_1 \cos\alpha} + \cancel{2 l_2 \cos\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\alpha \\ l_1 - l_1\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = p'$$

$$\vec{\omega} = (0,0,1), \quad \theta = \alpha$$

$$M^{-1} \cdot p' = \begin{pmatrix} \frac{l_1 \sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} + \frac{1}{2} l_1 - \frac{1}{2} l_1 \cos\alpha \\ -\frac{1}{2} l_1 \sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} (l_1 - l_1\cos\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Autonomes Greifen 25.10.11

$T_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta}$ $\quad \hat{\xi} \in se(3)$ $\quad \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{w} & \vec{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T_{ab}(\theta) = T_R(\theta) \cdot T_{ab}(0)$

$T_R(\theta) = e^{\hat{\xi}_R \theta}$ $\quad \xi_R = (\vec{v}, \vec{w}) = (e_1, 0, 0, 0, 0, 1)^T$
$\qquad = (-\vec{w} \times \vec{p}, \vec{w})$

$\vec{w}$ - Drehachse
$\vec{p}$ - Punkt auf Drehachse

$\vec{p} = (0, e_1, 0)^T$

Chasles' Theorem:

Jede Bewegung $T \in SE(3)$ ist äquivalent zu einer Schraubenbewegung (screw motion), d.h. es gibt eine Achse $\vec{w}$ im Raum, anhand derer sowohl die Rotation als auch die Translation der Bewegung stattfindet.

1.4 Screw-Koordinaten

Entlang der Achse $\vec{w}$ kommutieren Rotation und Translation. Für die Gesamtbewegung gilt:

$S(\theta) = e^{\hat{\xi}_R \theta} \cdot e^{\hat{\xi}_T \cdot \theta} = e^{\hat{\xi}_T \theta} \cdot e^{\hat{\xi}_R \theta} = e^{(\hat{\xi}_T + \hat{\xi}_R)\theta}$

$\xi_T = (\vec{v}, 0)$

$= \begin{pmatrix} R_{\vec{w}}(\theta) & -R_{\vec{w}}(\theta)\vec{p} + \vec{p} + h\theta\vec{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autonomes Greifen

25.10.11

In Twist Koordinaten: $\xi_s = \xi_R + \xi_T = (-\omega \times p + h\omega, \vec{\omega})$

Def: Ein Screw besteht aus:

- eine Achse $e = \{\vec{p} + \lambda\vec{\omega} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — 4 Param:
- Steigung h $\begin{cases} \infty & \text{: reine Translation} \\ 0 & \text{: reine Rotation} \end{cases}$ — 1 Param
- der Betrag $M = \theta$ der Bewegung

Twist → Screw-Koordinaten? geg. $\xi = (\vec{v}, \vec{\omega})$

	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{\omega} = 0$ (reine Translationen)
Achse e	$\left\{\frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{\|\vec{\omega}\|^2} + \lambda\vec{\omega}\right\}$	$\{0 + \lambda\vec{v}\}$
Steigung h	$\frac{\omega^T \vec{v}}{\|\vec{\omega}\|^2}$	∞
Betrag M	$\|\theta\vec{\omega}\|$	$\|\theta\vec{v}\|$

1.5 Vorwärtskinematik

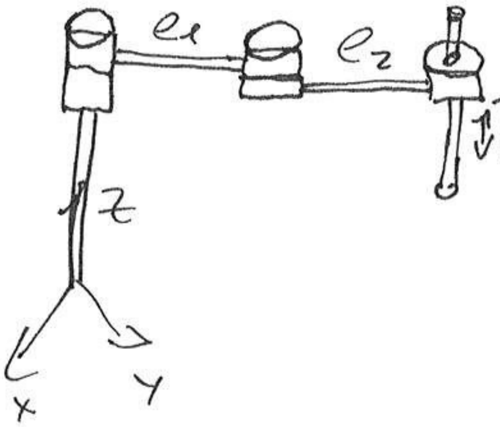
- Manipulator mit k Gelenken (rot., linear)
- Endeffektor ~~zu~~ Transformation $T_{st}(\theta_1, \dots, \theta_k)$
- S – Basis-KS
- T – Tool-KS

1. DH-Ansatz: $T_{st}(\vec{\theta}) = T_{s1}(\theta_1) \cdot T_{12}(\theta_2) \cdot \ldots \cdot T_{k-1k}(\theta_k) \cdot T_{kt}$

2. Angabe von Twists, die die Gelenkbewegungen erzeugen.

Autonomes Greifen

25.10.11



$$T_{st}(\theta_k) = \underbrace{T(\theta_k)\cdot T_{st}(\theta_k=0)}$$

$$T_{st}(\theta_{k-1},\theta_k) = T(\theta_{k-1})\cdot T_{st}(\theta_{k-1}=0,\theta_k)$$

$$T_{st}(\theta_1,\dots,\theta_k) = \underbrace{e^{\hat{\xi}_1\theta_1}}_{T(\theta_1)}\cdot\underbrace{e^{\hat{\xi}_2\theta_2}}_{T(\theta_2)}\cdots\underbrace{e^{\hat{\xi}_k\theta_k}}_{T(\theta_k)}\cdot T_{st}(0)$$

$$T(\theta_1) \neq T_{s1}(\theta_1)$$

Die Twists ξ_i hängen lediglich von der Wahl des Basis-KS. S und der Referenz-stellung | Nullstellung des Roboters ab.

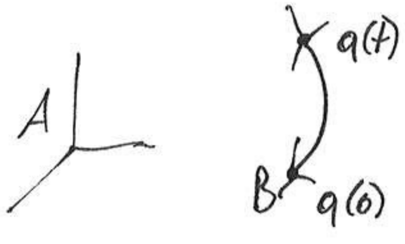
$w_i = (0,0,1)^T \quad p_1 = (0,0,0)^T \quad p_2 = (0,l_1,0)^T \quad p_3 = (0,l_1+l_2,0)^T$

$$T_{st}(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \begin{matrix} 0 \\ l_1+l_2 \\ l_0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Geschwindigkeiten

$\dot{q}_a = \vec{\omega} \times \vec{q}_a = \hat{\omega}\, \vec{q}_a$

$R_{ab}(t) = e^{\hat{\omega} \cdot t}$



$q_a(t) = R_{ab}(t) \cdot \vec{q}_b$

$\dot{q}_a(t) = \dot{R}_{ab}(t) \cdot q_b + \underbrace{\cancel{R_{ab} \cdot \dot{q}_b}}_{=0}$

$= \dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}^{-1} \cdot \underbrace{R_{ab} \cdot q_b}$

$\dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}^{-1} \quad q_a(t)$

$\Longrightarrow \hat{\omega} = \dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}^{-1}$

Def.: Wir definieren: $\hat{\omega}^s_{ab} = \dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}^{-1}$ und $\hat{\omega}^b_{ab} = R_{ab}^{-1} \cdot \dot{R}_{ab}$

$\vec{\omega}^s_{ab}$ – Rotationsgeschw. zwischen KS A und B, bzgl. des ortsfesten KS A

$\vec{\omega}^b_{ab}$ – Rotationsgeschw. zwischen KS A und B, bzgl. des bewegten KS B

Autonomes Greifen 04.11.10

$$\hat{\omega}^a_{ab} := \dot{R}_{ab} R_{ab}^{-1} \quad , \quad \hat{\omega}^b_{ab} := R_{ab}^{-1} \cdot \dot{R}_{ab}$$

$$\dot{q}_a = \dot{R}_{ab} \cdot q_b$$

$$R_{ab}^{-1} \cdot \dot{q}_a = \dot{q}_b = \underbrace{R_{ab}^{-1} \cdot \dot{R}_{ab}}_{\hat{\omega}^b_{ab}} \cdot q_b$$

Lemma: $\forall\, \omega \in \mathbb{R}^3$, $\forall\, R \in SO(3)$ gilt:

$$\vec{\omega}' = R\omega \Leftrightarrow \hat{\omega}' = R \cdot \hat{\omega} \cdot R^{-1}$$

$\hat{\omega}' = \widehat{R\omega}$ $\qquad \vec{p} \in \mathbb{R}^3$ (Beweis)

$$\hat{\omega}' \vec{p} = R \hat{\omega} R^{-1} \vec{p}$$

$$\widehat{R\omega}\, \vec{p} = (R\omega) \times \vec{p} = (R\omega) \times (R R^{-1} \vec{p})$$

$$= R \cdot (\vec{\omega} \times R^{-1} \vec{p}) = R \cdot \hat{\omega} R^{-1} \vec{p}$$

$(Ra) \times (Rb) = R(a \times b)$ gilt nur da $R \in SO(3)$ $\Rightarrow$ Rotation

---

$$\omega^b_{ab} = R_{ab}^{-1}\, \omega^a_{ab} \Rightarrow \hat{\omega}^b_{ab} = R^{-1} \dot{R}_{ab} \cancel{R_{ab}^{-1}} \cdot \cancel{R_{ab}}$$

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$$

$$\hat{V}^a_{ab} := \dot{T}_{ab} \cdot T_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{ab} & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{ab}^{-1} & -R_{ab}^{-1} p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{R}_{ab} R_{ab}^{-1} & -\dot{R}_{ab} R_{ab}^{-1} p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in se(3)$$

Autonomes Greifen

$$\hat{V}^b_{ab} := T_{ab}^{-1} \cdot \dot{T}_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab}^{-1}\dot{R}_{ab} & -R_{ab}^{-1}\dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in se(3)$$

Def: $\hat{V}^a_{ab} := \dot{T}_{ab} T_{ab}^{-1}$ – geschwindigkeit zwischen A und B, ausgedr. in A Koord.

$\hat{V}^b_{ab} := T_{ab}^{-1}\dot{T}_{ab}$ = " " " " ", " " B "

$$V^a_{ab} = \begin{bmatrix} v^a_{ab} \\ w^a_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}^{-1} \cdot \vec{p}_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ (\dot{R}_{ab} R_{ab}^{-1})^\vee \end{bmatrix}$$

reine Translation: $V^a_{ab} = (\dot{p}_{ab}, 0)$

reine Rotation: $V^a_{ab} = (0, w^a_{ab})$

$$V^b_{ab} = \begin{pmatrix} v^b_{ab} \\ w^b_{ab} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab}^{-1} \dot{p}_{ab} \\ (R_{ab}^{-1} \dot{R}_{ab})^\vee \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}^a_{ab} := \dot{T}_{ab} T_{ab}^{-1} = T_{ab} \underbrace{T_{ab}^{-1} \cdot \dot{T}_{ab}}_{\hat{V}^b_{ab}} T_{ab}^{-1} = T_{ab} \cdot \hat{V}^b_{ab} T_{ab}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} w' = Rw \iff \hat{w}' R \hat{w} R^{-1} \\ v' = ?v \end{pmatrix}$$

Def: zu einer Transformation $T \in SE(3)$, $T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ definieren wir die Adjungierte:

$$Ad_T := \begin{pmatrix} R & \hat{p} \cdot R \\ 0 & R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

$$Ad_T^{-1} := \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}\hat{p} \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = Ad_{T^{-1}}$$

Die Adjungierte transformiert Twistkoordinaten bzgl. versch. KS (von B → A)

$$Ad_{T_{ab}} V^b_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab} R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^b_{ab} \\ w^b_{ab} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{ab} v^b_{ab} + \hat{p}_{ab} R_{ab} w^b_{ab} \\ R_{ab} w^b_{ab} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{p}_{ab} + p_{ab} \times \omega_{ab}^{a} \\ \omega_{ab}^{a} \end{pmatrix} = V_{ab}^{b}$$

$$T(t) = e^{\hat{\xi}\theta(t)} \cdot T_0$$

$$\dot{T}(t) = \dot{\theta}\,\hat{\xi} \cdot \cancel{e}(\hat{\xi}\theta) \cdot T(0)$$

$$\hat{V}_{ab}^{a} = \dot{T}T^{-1} = \dot{\theta}\hat{\xi} \cdot \cancel{\ldots}\; TT^{-1}$$

Lemma: Für 3KS (A, B, C) gelten folgende Relationen:

$$V_{ac}^{a} = V_{ab}^{a} + V_{bc}^{a} = V_{ab}^{a} + Ad_{T_{ab}} V_{bc}^{b}$$

$$V_{ac}^{c} = V_{ab}^{c} + V_{bc}^{c} = Ad_{T_{bc}}^{-1} V_{ab}^{b} + V_{bc}^{c}$$

$$V_{ab}^{b} = -V_{ba}^{b} = -Ad_{T_{ba}} V_{ba}^{a} = -Ad_{T_{ab}^{-1}} V_{ba}^{a}$$

1.4 Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J} : \dot{\theta} \longmapsto V_{st}^{s} \qquad T_{st} = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1(t)} \cdots e^{\hat{\xi}_k \theta_k(t)} \cdot T_{st}(0)$$

$$\hat{V}_{st}^{s} = \dot{T}_{st} \cdot T_{st}^{-1} = \sum_{k=1}^{k} \left(\frac{\partial T_{st}}{\partial \theta_i} \cdot \dot{\theta}_i \right) \cdot T_{st}^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial T_{st}}{\partial \theta_i} \cdot T_{st}^{-1} \right) \cdot \dot{\theta}_i$$

$$\frac{\partial T_{st}}{\partial \theta_i} T_{st}^{-1} = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1}\theta_{i-1}} \cdot \hat{\xi}_i e^{\hat{\xi}_i \theta_i} \cdot e^{\hat{\xi}_{i+1}\theta_{i+1}} \cdots e^{\hat{\xi}_k \theta_k} \cdot T_{st}(0) \cdot T_{st}^{-1}$$

$$= \quad '' \quad \cdot \hat{\xi}_i e^{-\hat{\xi}_{i-1}\theta_{i-1}} \cdots e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1}$$

$$= A \hat{\xi}_i \cdot A^{-1} = \left(Ad_A \xi_i\right)^{\wedge} = \hat{\xi}_i'$$

Autonomes Greifen   Oct. 11. 11

$$\left(\hat{V}_{st}^{s} = J \cdot \dot{\theta}\right)$$

Jede einzelne Spalte der Jacobi-Matrix ist als Twist interpretierbar (der die Bewegung des i-ten Gelenks erzeugt)

$$\xi_i' = \left(\frac{\partial T_{st}}{\partial \theta_i} T_{st}^{-1}\right)^{\vee} = Ad_{A_i} \xi_i \quad , A_i = \prod_{j=1}^{i-1} e^{\hat{\xi}_j \theta_j}$$

A_i beschreibt die neue Lage des Twists ξ_i nach Bewegung der ersten $i-1$ Gelenke.

$$J_{st}^{s} = [\xi_1', \ldots, \xi_k'] \quad , \hat{V}_{st}^{s} = J_{st}^{s} \cdot \dot{\vec{\theta}}$$

Autonomes Greifen

$$J^s_{st} = \mathring{T}_{st} T^{-1}_{st}$$

$$\xi^i_i = (-\omega^i_i \times q^i_i, \omega^i_i)$$

$$Ad\begin{pmatrix} 1\!\!1 & -p^s_i \\ & 1\!\!1 \end{pmatrix} \xi^i_i = (-\omega^s_i \times q^s_i - \underline{\underline{p^s_i \times \omega^s_i}}, \omega^s_i) \text{ klassische Robotik}$$

führt zur Abh. von allen Gelenken

$$V^s_{st} = J^s_{st} \cdot \mathring{\theta}_i \quad \mathring{\theta}_* = \left(J^s_{st}\right)^{-1} V^s_{st}$$

$$V^s_{st} = Ad\, J^s_{st} \cdot \mathring{\theta}_i \quad \mathring{\theta} = \left(J^s_{st}\right)^{-1} Ad^{-1}_1 V^s_{st}$$

Iterative Berechnung der Jacobi Matrix

Vorwärtskinematik für generische Berechnung

$$T_{st} = T_{s0} \left(\Pi \underbrace{T_i(\theta_i) \cdot T_{i,i+1}}_{A_i(\theta_i) - DH\text{-Matrix}}\right) \cdot T_{nt}$$

Per Konvention wählt man die z-Achse als Bewegungsachse.

$$T_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & & \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad T_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \end{matrix} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

1.C Inverse Kinematik Welche Gelenkgeschwindigkeit braucht man für eine V^*_{st}?

$$V^*_{st} = \underbrace{J^*_{st}}_{\mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \mathring{\theta} \Rightarrow \mathring{\theta} = (J^*_{st})^{-1} \cdot (V_{st}) \qquad m = 6,\; n = \#\text{Gelenke}$$

Pseudoinverse: $J^\# = J^T \underbrace{(J J^T)}_{\mathbb{R}^{m \times m}}{}^{-1} = \underbrace{(J^T J)}_{\mathbb{R}^{n \times n}}{}^{-1} J^T$

Pseudoinverse minimiert $\| J \cdot \dot\Theta - V \|$ ~~und findet die beste Lösung~~
und findet die norm-minimale Lösung: $\min \|\dot\Theta\|$
stabile Berechnung mittels SVD

$$J_{m\times n} = U_{m\times m} \cdot \Sigma_{m\times n} \cdot V^+_{n\times n} \qquad U^+U = \mathbb{1} \quad V^+V = \mathbb{1}$$

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^\# = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^+ \qquad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_m} \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Singularitäten bei $\sigma_i \approx 0$
Regularisierung

$$J^\# = J^+ (J J^+ + \lambda \mathbb{1})^{-1} \iff \frac{\sigma}{\sigma^2 + \lambda^2} \iff \min \|J\dot\Theta - V\| + \lambda\|\dot\Theta\|$$

1.8.1 Redundanzauflösung

Nullraum $\mathcal{N}(J)$ gilt: $\dot\Theta_N \in \mathcal{N}(J) \cdot J\dot\Theta_N = 0$

$H = \|\Theta - \bar\Theta\|^2 \Rightarrow \dot\Theta_H = -\alpha \nabla_\Theta H$ Gradientenabst. zur min. von H

$N(J) = (\mathbb{1} - J^\# J) = V_N V_N^+$ - Nullraumprojektor: $J \cdot N = 0$

$$\dot\Theta = J^\# \cdot V + N(J) \cdot \Theta_H$$

Autonomes Greifen

18.11.11

$$V = J \cdot \dot{\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\theta} = J^{\#} \cdot V + N \dot{\theta}_H \quad , \quad \dot{\theta}_H = -\eta \nabla_{\theta} H \, , \; H = \|\theta - \theta_0\|^2$$

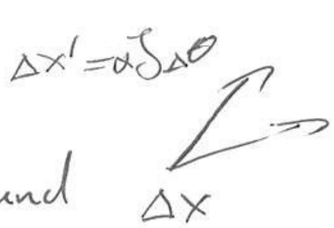
Vermeidung von Gelenkwinkelgrenzen

$\Rightarrow$ Gewichte für Gelenke nah den Grenzen (und mit Bewegung auf die Grenze zu) werden nahe 0 gewählt.

$\Rightarrow$ Jacobi-Pseudoinverse findet Lsg, die ohne das Gelenk auskommt.

1.8.2 Transponierte Jacobi Matrix

$$\Delta \theta = \alpha J^T \Delta x$$



Die tatsächliche Bewegung $\Delta x' \approx \alpha J \Delta \theta$ und die gewünschte Δx stimmen nicht exakt überein, zeigen aber (grob) in die selbe Richtung:

$$\Delta x' \cdot \Delta x = (\alpha J J^T \Delta x)^T \cdot \Delta x = \alpha \, (J^T \Delta x)^T (J^T \Delta x)$$

$$= \alpha \, \| J^T \Delta x \|^2 \geq 0$$

Wie wählt man α? Minimiere $E = \frac{1}{2} \| \Delta x' - \Delta x \|^2$

$$\Rightarrow \frac{\delta E}{\delta \alpha} = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle \Delta x , J J^T \Delta x \rangle}{\| J J^T \Delta x \|^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta x'}{\| \Delta x' \|^2}$$

Autonomes Greifen 18.11.11

1.9 Wrenches: Drehmomente und Kräfte

Eine verallg. Kraft umfasst eine lineare Kraft $f \in \mathbb{R}^3$ und ein Drehmoment $\tau \in \mathbb{R}^3$. Dieses Paar nennen wir Wrench:

$$F = (\vec{f}, \vec{\tau}) \in \mathbb{R}^6$$

Die Kraft und das Drehmoment sollen im Ursprung ihres KS angreifen.

Fall 1: Ein Kraft: $F_c = (f_c, 0) \Leftrightarrow F_o = \begin{pmatrix} R_{oc} f_c \\ p_{oc} \times R_{oc} f_c \end{pmatrix}$

Fall 2: Drehmoment: $F_c = (0, \tau_c) \Leftrightarrow F_o = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{oc} \tau_c \end{pmatrix}$

Fall 3: $F_c = (f_c, \tau_c) \Leftrightarrow F_o = \begin{pmatrix} R_{oc} & \\ \hat{p}_{oc} R_{oc} & R_{oc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_c \\ \tau_c \end{pmatrix} = Ad^T_{T_{oc}^{-1}} \cdot F_c$

$$V_{oc}^o = Ad_{T_{oc}} V_{oc}^c = \begin{pmatrix} R_{oc} & \hat{p}_{oc} R_{oc} \\ & R_{oc} \end{pmatrix} V_{oc}^c$$

$$\cancel{Ad_{T_{oc}^{-1}} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ & R \end{pmatrix}}$$

Autonomes Greifen 18.11.11

$$\delta w = V_{ac}^{c} \cdot F_c^{c} \stackrel{!}{=} V_{ao}^{o} \cdot F_o$$

$$= (V_{ac}^{c})^T \cdot F_c = \left(Ad_{T_{oc}^{-1}} V_{ao}^{o} + \overset{o}{V_{oc}^{c}} \right)^T \cdot F_c$$

$$= (V_{ao}^{o})^T \cdot \underbrace{\left(Ad_{T_{oc}^{-1}}^{T} \cdot F_c \right)}_{F_o}$$

1.9.1 Dualität zwischen Twists und Wrenches

Def: Ein Twist V und Wrench F heißen reziprok zu einander, wenn ihr Skalarprodukt $\delta w = F \cdot V$ Null ist, d.h. Vektoren orthogonal im 6-d Raum.

Eine Menge Twists $V_1, \dots, V_N$ oder eine Menge Wrenches $F_1, \dots, F_N$ spannen einen linearen Unterraum im $\mathbb{R}^6$ auf (mit Dim m)

Der orthogonale Unterraum mit Dim. $6-m$ enthält dazu reziproke Wrenches bzw. Twists.

1.10 Transponierte Jacobi Matrix bildet Kräfte am Endeffektor auf Gelenk-Drehmomente ab.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta w \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\Theta}^T T \, dt = W = \int_{t_1}^{t_2} (V_{st}^{s})^T \cdot F_s \, dt \quad \forall \, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\Theta}^T T = (V_{st}^{s})^T \cdot F_s = (J_{st}^{s} \dot{\Theta})^T F_s \qquad \forall \dot{\Theta}$$

$$\Rightarrow T = (J_{st}^{s})^T \cdot F_s$$

$$\dot{\Theta} = J^T V$$

Autonomes Greifen 25.11.11

2. Mehrfingriges Greifen

Wie kann man einen Griff beschreiben??

- Objekt-KS O
- Kontakt-KSe C_i: Konvention: Z-Achse entlang der Normalen ins Objektinnere
+ Kontaktmodelle

2.1.1 Kontaktmodelle

ist definiert durch ein Reibungsmodell: Welche Kräfte können durch den Kontakt übertragen werden?

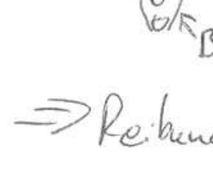
- Punktkontakt ohne Reibung: Kräfte können nur entlang der Kontaktnormalen übertragen werden.
Tangentiale Kräfte, parallel zur Kontaktfläche nicht erlaubt.

$$F_C = [0,0,f,0,0,0]^T, FC = \{f \geq 0\}$$

$$F_C = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{B_C} f$$

⇒ Reibungsmodell beschreibbar durch eine Basis B_C (von potentiell möglichen) Kraftrichtungen, den freien Parametern (Kontaktkräfte) und Bedingungen FC an diese Kontaktkräfte.

- Punktkontakt mit Reibung (mit Haftreibung / Gleitreibung)



Coloumb-Gesetz: $\|f_t\| \leq \mu f_z$ μ - Reibungskoeffizient.

$$\mu = \tan\alpha$$

$$F_C = [f_x, f_y, f_z, 0,0,0]^T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix} \quad FC = \{\vec{f_C} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sqrt{f_x^2+f_y^2} \leq \mu f_z\}$$

-(Punktkontakt) Soft-Finger-Kontakt: realistischer Kontakt, der versucht Eigenschaften von Flächenkontakten zu modellieren, nämlich die Möglichkeit ein Drehmoment τ_z auszuüben.

$$F_c = [f_x, f_y, f_z, 0, 0, \tau_z]^T = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

$$FC: \quad 0 \leq \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq \mu f_z$$

$$|\tau_z| \leq \gamma f_z$$

Die Menge der Wrenches die durch diese Modelle beschrieben wird ist jeweils Konvex:

$$\forall f_1, f_2 \subset FC_c \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 : \alpha f_1 + \beta f_2 \in FC_c$$

2.1.2 Die Greif-Matrix

Welche Gesamtkraft F_o wirkt auf das Objekt/kann auf das Objekt einwirken.

$$F_{c_i} = B_{c_i} \cdot \vec{f}_{c_i}$$

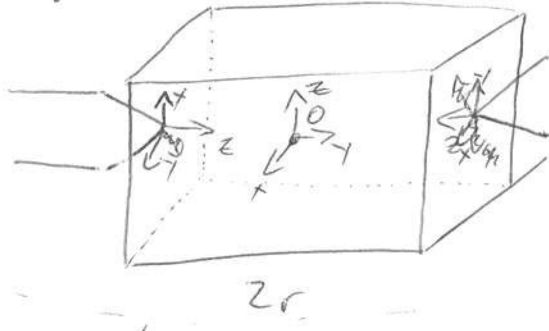
$$F_o = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{Ad^T_{T^{-1}_{oc_i}} B_{c_i}}_{\text{statischer/geometr. Anteil}} \underbrace{f_{c_i}}_{\text{variabel}}, \quad f_{c_i} \in FC_{c_i}$$

$$G_i = Ad^T_{T^{-1}_{oc_i}} B_{c_i} \in \mathbb{R}^{6 \times m_i}$$ m ist Dim. der Wrench-Basis

$G = [G_1, \dots, G_k]$ - Greifmatrix, $G \in \mathbb{R}^{6 \times m}$ $\quad m = \sum m_i$

$$F_o = G \cdot \vec{f}_c, \quad \vec{f}_c = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k), \quad \vec{f}_c \in FC = FC_{c1} \times \dots \times FC_{ck}$$

Beispiel:



Punktkontakt mit Reibung

$$B_{c_i} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3\times 3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ad^T_{T_{oc_i}^{-1}} = \begin{pmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ \hat{p}_{oc_i} R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & -r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{f_{1x}^2 + f_{1y}^2} \leq \mu_1 f_{1z}$$
$$\sqrt{f_{2x}^2 + f_{2y}^2} \leq \mu_2 f_{2z}$$

2.2 Bewertung von Griffen

In wie weit kann ein Griff externen Kräften widerstehen, und damit die Geometrie des Griffes stabil halten?

Def: Force Closure: Ein Griff (G, FC) heißt Force Closure, wenn er jedem externen Wrench widerstehen kann.

$$\forall F_e \in \mathbb{R}^6 \; \exists \vec{f_c} \in FC : G\vec{f_c} = -F_e \iff F_0 = G \cdot f_c + f_e = 0$$

$$G(FC) = \mathbb{R}^6$$

Satz: Ein Griff ist force-closure genau dann wenn G surjektiv ist und es strikte interne Kräfte gibt: $f_N \in \mathcal{N}(G) \wedge \mathrm{int}(FC) \neq \emptyset$

Autonomes Greifen

25.11.11

Interne Kräfte haben keinen Nettoeinfluss auf das Objekt:

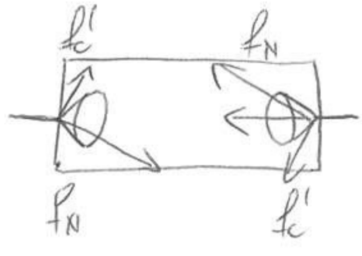
$G \cdot f_N = 0$

Beweis: $\Leftarrow$ Wähle $F_e \in \mathbb{R}^6$, G surjektiv: $\exists f_c' \in \mathbb{R}^m$

$(f_c' \notin F_c)$, $G \cdot f_c' = F_e$

Durch Addition interner Kräfte kann f_c' in die Reibungskegel FC verschoben werden.

denn: $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f_c' + \lambda f_N}{\lambda} = f_N \in \mathrm{int}(FC)$



$\Rightarrow$

$G(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^6$ Surjektivität ist klar

Sei F_e beliebig $\exists \vec{f_1}, \vec{f_2} \in \mathrm{int}(FC)$ mit $G f_1 = F_e$ und $G f_2 = -F_e$

$\Rightarrow f_N = f_1 + f_2 \in \mathrm{int}(FC)$

Antipodale Griffe:

Satz: Ein planarer Griff mit zwei Punktkontakten mit Reibung ist Force-Closure gdw. die Verbindungslinie zwischen den Kontaktpunkte strikt innerhalb der Reibungskegel liegt.

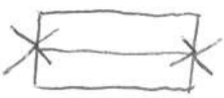
Autonomes Greifen

02.12.11

$F_O = G \cdot \vec{f_c}$ $\quad G = [G_i] \quad G_i = Ad^{T}_{T^{-1}_{oc_i}} B_{c_i}$

force closure: $\forall F_e \in \mathbb{R}^6 : \exists f_c \in FC : -F_e = F_O = G \cdot f_c$

G surjektiv, strikte innere Kräfte

Antipodaler Griff 

2D: Punktkontakt mit Reibung $\Rightarrow$ surjektivität von G
$p=3$ im $\mathbb{R}^3$ Wrench-space (x, y, T)

3D: Softfingerkontakte $\rightarrow$ surjektivität
$p=6$

2.2.2 Formclosure

Ein Griff heißt Formclosure, wenn er unter der Annahme von Punktkontakten ohne Reibung force closure ist.

form closure $\Rightarrow$ force closure

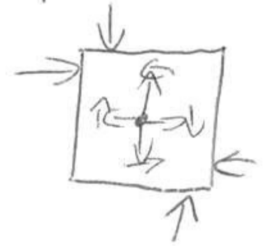
$\Leftrightarrow \forall F_e \in \mathbb{R}^{p} \; (p = 3/6) : \exists f_i \geq 0 : \sum_i G_i f_i = -F_e$

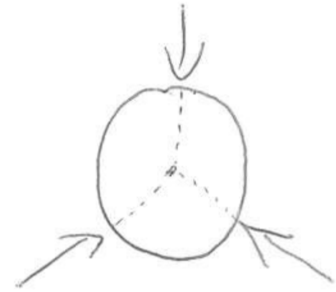
Die Spalten G_i von G spannen den $\mathbb{R}^p$ also positiv auf

- Die konvexe Hülle der Spalten von G enthält eine ε-Umgebung des Ursprungs.

$$co(\{G_i\}) = \{F = \sum f_i G_i \mid f_i \geq 0, \sum f_i \leq 1\}$$

Beispiele für 2D-Griffe





Satz: (Caratheodory)

Wenn eine Menge $X=\{v_1,\dots,v_k\}\in\mathbb{R}^p$ den gesamten Raum aufspannt, dann gilt: $k\geq p+1$

2.2.3 Qualitätsmaße

Qualität eines Griffes kann beschrieben werden durch das Volumen/die Form des Wrench Space

$$W(G)=\{F_O=Gf_c \mid f_c\in FC, \|f_c\|\leq 1\}$$

Die Norm kann unterschiedlich definiert werden und man erhält unterschiedliche Wrench-spaces W. In der Regel wird die Normalkraft $f_n^{c_i}$ beschränkt.

1. Jeder Kontakt ist unabhängig: $0\leq f_i^n\leq 1 \Leftrightarrow \|f_c\|_\infty = \max_i |f_i^n|\leq 1$

$$W_{L\infty}=co\left(\bigoplus G(FC_{c_i}^{max})\right)$$

2. Summe der Normalkräfte ist beschränkt: $\|f_c\|_1=\sum_i |f_i^n|\leq 1$

$$W_{L1}=co\left(\bigcup_i G(FC_{c_i}^{max})\right), \quad FC_{c_i}^{max}\approx co(f_{c_i}^j)$$

j = #Diskretisierungspunkte

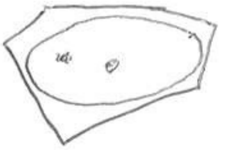
Autonomes Greifen

02.12.11

Beschreibung der Griffqualität anhand des Wrench-space:

- Falls der Ursprung (des Kraftraumes) innerhalb von W liegt, dann ist der Griff force-closure.
- Bestimme den kleinsten Abstand vom Ursprung zum Rand von W. Die zug. Richtung, gibt die Kraft-Richtung an, die der Griff besonders schlecht erzeugen kann.
- Bestimme mittlere Qualität des Griffs über das Volumen des Wrench-space

- Task Ellipsoid: Ersetze Kugel, die Kräfte in alle Richtungen gleich bewertet durch ein Ellipsoid und suche größte Ellipsoid bestimmter Form und Orientierung im Raum (task-abhängig), das noch in W hineinpasst.



$$E = \{ x \mid (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \leq \varepsilon, \Sigma \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \mu \in \mathbb{R}^6 \}$$

$$\Sigma = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_6) U^T \quad UU^T = \mathbb{1} \quad \sigma \geq 0$$

Σ beschreibt die Form und Orientierung des Ellipsoids, ε beschreibt die Größe von E_ε

- Virtuelle Kontakte: Wir suchen die Kraft (Maximal) αF die wir in Richtung F ausüben können.

$$G f_c = \alpha F \iff \underbrace{[G \; -F]}_{G'} \underbrace{\begin{pmatrix} f_c \\ \alpha \end{pmatrix}}_{f_c'} = 0 \qquad \alpha > 0$$

$$G' f_c' = 0$$

Autonomes Greifen 9.12.11

2.2.4 Lineare Matrixungleichungen (LMI)

Ziel: exakte Beschreibung der Reibungsbedingungen FC

Def: Sei $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symm. Matrix. Die Schreibweisen

$S > 0$ „S ist positiv (definit)"

$S \geq 0$ „S ist positiv semidefinit"

verallgemeinern die skalaren Ungleichungen und stehen für:

$S > 0 \iff \forall x \neq 0,\ x^T S x > 0$

$\iff$ alle (reellen) Eigenwerte λ_i von S sind positiv

$\lambda_i(S) > 0$

$S \geq 0 \iff \forall x \neq 0,\ x^T S x \geq 0$

$\iff \lambda_i(S) \geq 0$

Def: Eine LMI ist eine Gleichung der Form:

$$P(x) = S_0 + x_1 S_1 + \dots + x_k S_k \underset{(=)}{>} 0$$

wobei die $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. Matrizen sind und $x_i \in \mathbb{R}$ sind Skalare Variablen um die Ungleichung zu erfüllen.

Satz: Sei eine LMI der Form $P(x) = S_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i S_i$ und eine beliebige affine Transformation $x = Az + b$ mit $A^{m \times e}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben, dann ist $P'(z) = P(Az + b)$ wieder eine LMI in den neuen Variablen $z \in \mathbb{R}^e$

Autonomen Greifen

Beweis: $$P'(z) = S_0 + \sum_{i=1}^{m} S_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij} z_j + b_i\right)}_{x_i = (Az+b)_i}$$

$$= \underbrace{S_0 + \sum_{i=1}^{m} S_i b_i}_{S_0'} + \sum_{j=1}^{l} z_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} S_i\right)}_{S_j'}$$

Satz: Die Reibungskegelbedingungen für FC können als LMI formuliert werden.

- reibungsfreier Punktkontakt:

$$P_z = f \geq 0$$

- Punktkontakt mit Reibung:

$$P = \begin{pmatrix} \mu f_z + f_x & f_y \\ f_y & \mu f_z - f_x \end{pmatrix} \geq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} f_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} f_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_y \geq 0$$

Eigenwerte $\lambda_\pm(P) = \mu f_z \pm \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \geq 0$

$$\lambda_- \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq \mu f_z$$

$$\lambda_+ > 0$$

- Softfingerkontakt:

$$P = \begin{pmatrix} f_z & & & \alpha f_x \\ & f_z & & \alpha f_y \\ & & f_z & \beta f_n \\ \alpha f_x & \alpha f_y & \beta f_n & f_z \end{pmatrix} \geq \quad \alpha = \mu^{-1}, \beta = \gamma^{-1}$$

Autonomes Greifen 9.12.11

Für mehrere LMI $P_i \geq 0$ gilt:

$$\vec{f} \in FC \Leftrightarrow P(f) = \begin{pmatrix} P_1(f_{c1}) & & & \\ & P_2(f_{c2}) & & \\ & & \dots & \\ & & & P_k(f_{ck}) \end{pmatrix} \geq 0$$

Bemerkungen:

- Die triviale Lösung mit $f_c = 0$ erfüllt die Reibungsbed.
  $P(f_c) \geq 0$
- Wenn f_c strikt im Inneren der FC liegen soll, fordert man $P(f_c) > 0$. Dann gibt es auch keine triviale Lösung.

Skalare Ungleichungen:

$$m \leq T \leq M \Leftrightarrow \begin{matrix} -m + T \geq 0 \\ M - T \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -m & \\ & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} T \geq 0$$

Force closure: Falls G surjektiv ist, bestimme eine Basis $N = [n_1, \dots, n_e]$ des Nullraumes von G. Jeder Vektor $f_N \in N(G)$ kann dann als $f_N = N_z$ mit $z \in \mathbb{R}^e$ geschrieben werden.

z.z.: $P(f_N) \overset{!}{>} 0$ für $f_N \in N(G)$

$\Rightarrow P'(z) = P(N_z) > 0 \Rightarrow$ Löse bzgl. $z \in \mathbb{R}^e$

Wenn eine Lösung für die LMI existiert, gibt es strikte interne Kräfte, sodass der Griff G force-closure ist.

Autonomes Greifen

9.12.11

Minimierung der Kontaktkräfte:

Bei gegebenem externen ~~Kraft~~ Wrench F_e, suche minimale Kontaktkräfte f_c, um dem Wrench zu widerstehen.

- Best. bel. Lösung f_0 die der Gleichung $G \cdot f_c = -F_e$ (Pseudoinv. $G^{\#}$)
- Addiere interne Kräfte, um die Reibungsbed. zu erfüllen:

$$M = \{ f_c \in \mathbb{R}^m \mid G f_c = -F_e, \cancel{f_c \in FC} \} = \{ f_0 + N_z \mid z \in \mathbb{R}^e \}$$

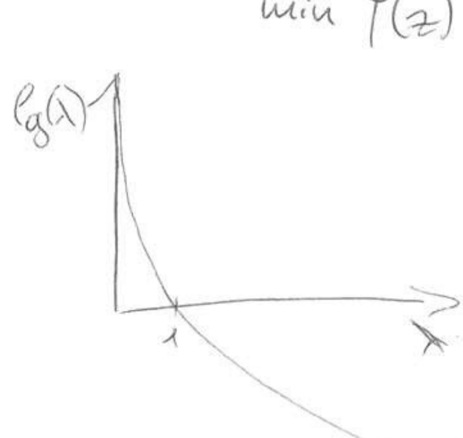
$\rightarrow$ Optimierung: $\min \Psi(f_c) = \vec{w}^T f_c$

$$\Rightarrow \min \Psi(z) = \Psi(f_0 + N_z) = \underbrace{w^T f_0}_{\text{const}} + \underbrace{w^T \cdot N_z}_{w^T}, \quad f_c \in FC, \quad P(z) > 0$$

Leider: Lsg. der Lin optimierungsproblems immer auf dem Rand, d.h. Rand von FC

$\hookrightarrow$ zusätzliche Kostenfunktion: mögl. großer Abstand zum Rand der Reibungskegel:

$$\min \Psi(z) = w^T N_z + \underbrace{\log(\det P^{-1}(z))}_{-\sum \log \lambda_i} \qquad \det P^{-1} = \prod \lambda_i^{-1}$$



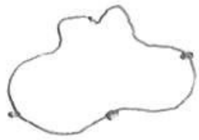
Auf den Kegelwänden gilt $P(z) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$

$-\log(\lambda_i) \rightarrow \infty$ für $\lambda_i \rightarrow 0$

$\Rightarrow -\sum \log \lambda_i$ ist wirkungsvolle Barriere um die Kräfte innerhalb der Reibungskegel FC zu halten.

Autonomes Greifen 13.01.12

2.6 Zusammenfassung



	Finger		Kontakte		Objekt
Geschw.	$\dot{\Theta}$	$\xrightarrow{J_H}$	$B_c^T V_{pc}^{bc}$	$\xleftarrow{G^T}$	V_{pO}^{O}
Kräfte:	T	$\xleftarrow{J_H^T}$	$\vec{f}_c$	$\xrightarrow{G=(Ad^{-1}_{g_{oc}} B_{ci})}$	F_O

force closure: jedem wrench F_e kann (passiv) widerstanden werden. $G(FC)=R^6$

manipulierbarkeit: jede Objektbewegung kann durch ~~entspr.~~ geeignete Gelenkbewegungen erzeugt werden ohne eine Bewegung zwischen Finger und Objekt in den Kontaktpunkten (bzgl. Kontaktbasis B_c) zuzulassen. d.h. i.d.R kein Sliding. $R(G^T) \subseteq R(J_H)$

interne Kraft: Kontaktkräfte, die keinen Netto-Wrench auf das Objekt ausüben. $f_N \in N(G) \cap FC$

interne Bewegungen: Gelenkbewegungen $\dot{\Theta}$ die keine Objektbewegung erzeugen. $\dot{\Theta}_N \in N(J_H)$

Autonomes Greifen 13.01.17

strukturelle Kräfte: Kontaktkräfte f, die ohne Gelenkdrehmomente aufgebracht werden (können).

$$f_c \in N(J_H^+)$$

Voraussetzungen zum Greifen:

3D-Pose (Position + Orientierung)

3D-Shape

Taktil-/Kraftfeedback, nachgiebige Motorsteuerung

Ansätze zum Greifen:

1. Optimierung von Kontaktpunkten
   → Inverse Kinematik / Bewegungsplanung um Kontakte zu erreichen
   #schlecht

2. einfaches Zugreifen mit nachgiebigen Greifern
   → hohe Kontaktfläche und hohe Griffstabilität (force closure) aber wenig Manipulierbarkeit

3. ~~[illegible]~~ Simulation von Greifbewegungen ausgehend von unterschiedlichen Angriffsrichtungen $\in \mathbb{R}^6$ (relative Lage von Objekt und Hand) und unt. Handposturen / -stellungen
   Bewertung des erreichten Griffs bzgl. Stabilität.
   Planung / inverse Kinematik (jetzt nur für Roboterarm / Endeffektorlage)

Regelung der Kontakt/Greifkraft, sodass Objekt stabil gehalten wird

→ Wissen über Objektgewicht / Trägheitseigenschaften

→ besser: online-Regelung der Griffkraft um (ab) Slip zu vermeiden erfordert Slip-detection → erf. Kont./Kraft/Taktil-Sensoren

Autonomes Greifen 13.01.12

Kraftmessung

- Drehmomentsensoren in den Gelenken
- Motorstrom erlaubt grobe Abschätzung des Gelenkdrehmoments abzgl. nicht messbarer Verluste im Getriebe.

Posturabhängig

- Taktilsensorik misst lokale ~~Kräfte~~ Kontaktkräfte

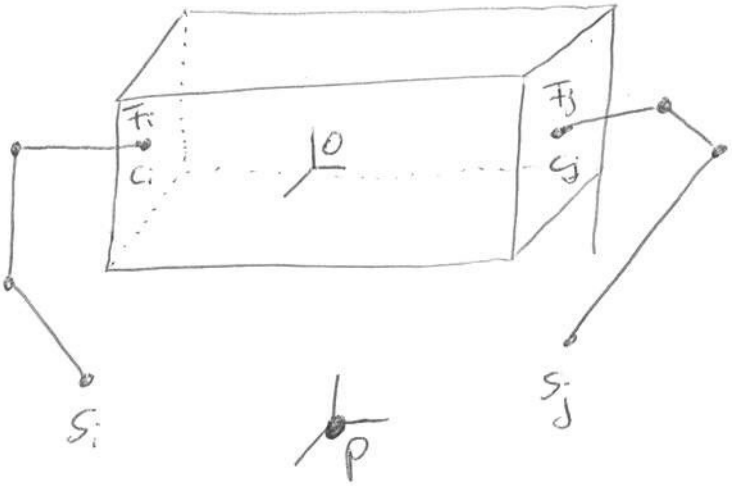
„Haut" ermöglicht Erkennung räumlicher Strukturen, Kanten, Vertiefungen, etc.

direkte Kraftmessung unabhängig von der Postur

Strategien zur Einschränkung des Suchraums bei der Simulation von Griffen

- 6D-Raum von rel. Hand-Objekt-Lage
  - Beschränkung auf Basisformen: Kugel, Zylinder, Kegel, Quader
  - Antipodale Griffe: suche gegenüberliegende parallele Flächen eines Objektes

2.3. Die Greifbedingung



Die Greifbedingung für einen Kontakt legt fest, entlang welcher Richtungen keine Objekt-Finger-Bewegung möglich ist.

<u>Bsp:</u> Punktkontakt ohne Reibung

$$[0,0,1,0,0,0]^T \cdot V^{c_i}_{f_i c_i} \overset{!}{=} 0$$

Im Allgemeinen dürfen keine Verschiebungen entlang der Richtungen stattfinden, entlang derer Kräfte ausgeübt werden können. Für einen beliebigen Kontakt gilt daher:

$$B^T_{c_i} \cdot V^{c_i}_{f_i c_i} \overset{!}{=} 0 \quad (*)$$

$$A \to B \to C: \quad V^c_{ac} = Ad_{T^{-1}_{bc}} V^b_{ab} + V^c_{bc}$$

$$V^b_{ab} = -Ad_{T_{ba}} V^a_{ba} = -V^b_{ba}$$

Autonomes Greifen 16.12.11

$$F_i \to P \to C_i: \quad V_{f_iC_i}^{C_i} = Ad_{T_{PC_i}}^{-1} V_{f_iP}^{P} + V_{PC_i}^{C_i}$$

$$= -Ad_{T_{PC_i}}^{-1} Ad_{T_{Pf_i}} V_{Pf_i}^{f_i} + V_{PC_i}^{C_i}$$

$$P \to O \to C_i: \quad V_{PC_i}^{C_i} = Ad_{T_{OC_i}^{-1}} V_{PO}^{O} + \cancel{V_{OC_i}^{C_i}}^{\,0}$$

$$V_{fC_i}^{C_i} = -Ad_{T_{PC_i}}^{-1} Ad_{T_{Pf_i}} V_{Pf_i}^{f_i} + Ad_{T_{OC_i}^{-1}} V_{PO}^{O}$$

$$B_{C_i}^T Ad_{T_{PC_i}}^{-1} \underbrace{Ad_{T_{Pf_i}} V_{Pf_i}^{f_i}}_{V_{Pf_i}^{P}} \stackrel{!}{=} \underbrace{B_{C_i}^T Ad_{T_{OC_i}^{-1}}}_{=\left(Ad_{T_{OC_i}^{-1}}^T B_{C_i}\right)^T = G_i^T} V_{PO}^{O} = G_i^T V_{PO}^{O}$$

Die Fingerspitzengeschwindigkeit $V_{Pf_i}^{P}$ können wir über die Jacobi-Matrix bestimmen: $V_{Pf_i}^{P} = J_{Pf_i}^{P}(\Theta_i) \cdot \dot{\Theta}_i$

$$\Rightarrow \underbrace{B_{C_i}^T Ad_{T_{PC_i}}^{-1} \cdot J_{Pf_i}^{P}}_{J_H^i} \cdot \dot{\Theta}_i = G_i^T V_{PO}^{O} = \underbrace{B_{C_i}^T \cdot V_{PC_i}^{C_i}}$$

Geschwindigkeit der Fingerspitze in C_i projeziert auf die Kraftrichtungen B_{C_i} des Kontakts.

Geschw. des Kont. KS. bezgl. Pol P, proj. mit B_{C_i}

Def: Hand Jacobi-Matrix für K-Kontakte/Finger:

$$J_H(\Theta, T_{PO}) = \begin{pmatrix} B_{C_1}^T Ad_{T_{PC_1}}^{-1} J_{Pf_1}^{P}(\Theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & B_{C_K}^T Ad_{T_{PC_K}}^{-1} J_{Pf_K}^{P}(\Theta_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$m = \sum_{i=1}^{K} m_i \quad - \quad B_{C_i} = \mathbb{R}^{6 \times m_i}$

$n = \sum_{i=1}^{K} \quad - \quad$ # Fingergelenke

Autonomes Greifen

Greifbedingung: $J_H(\Theta, T_{po}) \cdot \dot{\Theta} = G^T \cdot V_{po}^o$

7.4 Manipulierbarkeit

Def: Ein Griff (G, FC, J_H) heißt manipulierbar, falls für jede Objektbewegung V_{po} relativ zu P durch entsprechende Gelenkwinkelbewegungen $\dot{\Theta}$ erzeugt werden kann.

Satz: Ein Griff ist manipulierbar, gdw. $R(G^T) \subseteq R(J_H)$.
d.h. alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^m$, die G^T erzeugen kann, kann J_H auch erzeugen.

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $v \in R(G^T)$ bel., dann gibt es V_{po}^o mit
$\vec{v} = G^T V_{po}^o$

Manipulierbarkeit $\Rightarrow$ es gibt $\dot{\Theta}$ mit $\vec{v} = G^T V_{po}^o = J_H \dot{\Theta} \in R(J_H)$

„$\Leftarrow$" Sei V_{po}^o beliebig und sei $\vec{v} = G^T V_{po}^o$. Da $v \in R(J_H)$ existiert $\dot{\Theta}$ mit $J_H \dot{\Theta} = v$

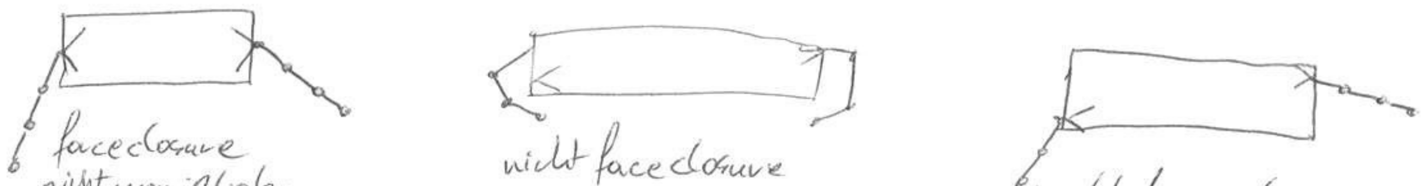
Bemerkung: J_H braucht nicht invertierbar zu sein, da die Pseudoinverse muss für Elemente des Bildraums $R(G^T)$ (höchst. 6-dim) „fehlerfrei invertierbar" sein.

- Falls die Anzahl der Gelenke $n > m$ (Redundanz): existieren interne Bewegungen $\dot{\Theta}_N$ aus dem Nullraum von J_H die keine Objektbewegung bzgl. relevanter Richtungen erzeugen.
- force closure und Manipulierbarkeit sind unabhängige Konzepte.

Autonomes Greifen

16.12.11

2D Griffe



force closure, nicht manipulierbar — nicht force closure, manipulierbar — nicht force closure, nicht manipulierbar

2.5 Strukturelle Kräfte

Die Hand-Jacobi-Matrix kann auch Kontaktkräfte ~~in~~ f_c in Gelenk-Drehmomente umrechnen: $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\Theta}_i \tau_i \, dt = W = \int_{t_1}^{t_2} (V_{pc_i}^{c_i})^T F_{c_i} \, dt$

$$\Longleftrightarrow \dot{\Theta}_i^T \tau_i = \delta W = \left(Ad^{-1}_{T_{oc_i}} V_{po}^{o}\right)^T \cdot B_{c_i} \cdot f_{c_i} \quad \forall \Theta_i \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \left(B_{c_i}^T Ad^{-1}_{T_{oc_i}} V_{po}^{o}\right)^T f_{c_i} = \left(G_i^T V_{po}^{o}\right)^T f_{c_i}$$

$$= \left(J_H^i \cdot \dot{\Theta}_i\right)^T f_{c_i} = \dot{\Theta}^T \left(J_H^i\right)^T f_{c_i}$$

$$\Rightarrow \tau_i = \left(J_H^i\right)^T \cdot f_{c_i}$$

Zusammengefasst für alle Kontakte:

$$\tau = J_H^T \cdot \vec{f_c}$$

- Kontaktkräfte $\vec{f}_c^{\,s} \in \mathcal{N}(J_H^T)$ heißen strukturelle Kräfte. Dies sind Kräfte, die nicht von Drehmomenten in den Gelenken herrühren, sondern von der ~~mecha~~ Struktur der Hand aufgebracht werden. Der Griff ist dann nicht manipulierbar

2.X Problem des Greifens in der Praxis

- Unsicherheit in Objektpose und form und Kontakt-position/kraft

-> Fehler entstehen und wir müssen damit umgehen!
-> Feedback-schleifen erlauben Fehler dynamisch zu korrigieren.
  - Vision: zB. „interest Points" -> lokale Bildstatistik.
  - Taktil

oder alternativ/zusätzlich: Nachgiebigkeit in den Fingern
- zB künstl. Muskeln / Begrenzung des Motorstroms / der Kraft
  -> erlaubt „gröberes" Zugreifen, Fehler werden „automatisch" durch die Physik korrigiert.

2.X.1 Taktilsensorik

- hohe räumliche Kraftauflösung an den Segmenten (insb. Endeffektoren)
-> Wahrnehmung von • Kontaktkräften
  • Oberflächenstrukturen
- Zwei Klassen: rezitiv vs. kapazitiv
  • resitiv: messe Widerstandsänderungen
    Bsp: FSR  für punktuelle Kraftmessung.
  • kapazitiv: messe Kapazitätsänderung
     Kraft ändert Kapazität des Kondensators

Autonomes Greifen 20.01.12

2.X.3 Slip-Detection

zwei Objekte, die sich gegen einander bewegen erzeugen auf Molekülebene Mikrovibrationen im Frequenzbereich von ca. 400 Hz.

→ Nyquist-Kriterium: Sampl.-Rate von 800 Hz notwendig.

Analyse des FFT-spektrums zeigt characteristische peaks bei auftreten von slip, die klassifiziert werden können.

Räumliches erkennen von Slip zu langsam aufgrund der geringen Auflösung.

2.X.4 adaptive Griffkraftregelung

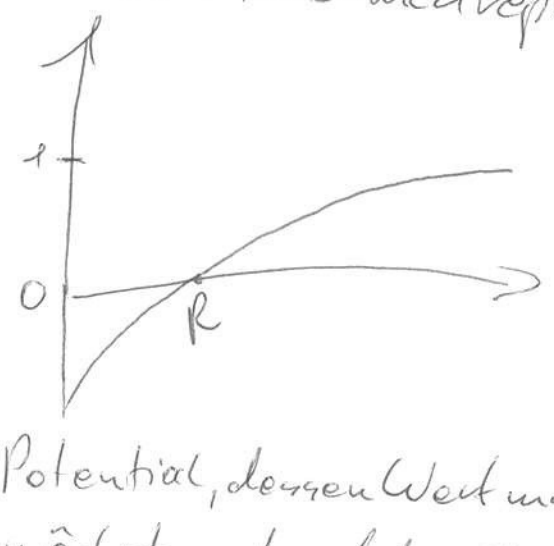
$$\Delta f(t) = \begin{cases} +\Delta & \text{falls Slip festgestellt wird} \to \text{schnelle Erhöhung} \\ -k f(t-1) & \text{sonst} \to \text{exp. abfall (sehr kleines } k) \end{cases}$$

2.X.1 Controller-basiertes-Greifen

Objekte sind implizit durch Funktionen (implicit surface) repräsentiert.

Bsp: Kugel mit Radius R

~~Bsp~~



Funktion definiert ein Potential, dessen Wert mit größerem Abstand zum Objekt wächst und auf der Objektoberfläche Null sei.

Autonomes Greifen

20.01.12

Unterschiedliche Controller verwenden Potential um Gelenk-bewegungen zu erzeugen.

- Handmittelpunkt folgt dem Gradienten des Potentials
  $\Rightarrow$ Hand $\rightarrow$ Objekt
- Handnormale mit dem Gradienten ausrichten / Winkel minimieren
  $\Rightarrow$ Handinnenfläche zum Objekt ausgerichtet
- Jede einzelne Fingerspitze verwendet obige Controller
  $\Rightarrow$ jeder Finger bewegt sich korrekt orientiert auf die Oberfläche zu
- Controller für gute Opposition der Finger

  - z.B. $\| \sum_i \vec{n}_i \| \rightarrow \min$
  - Abst der Fingerspitzen zu einander maximieren

Autonomes Greifen 27.01.12

Lernen in der Robotik, machine Learning:

- supervised learning versucht auf Datenpaare $(x,y) \equiv (x,q)$
  - ↳ Problem: Datenraum sinnvoll abzudecken und nicht in irgendwelchen Unterräumen stecken zu bleiben.
- Annahme unkorrellierter Daten
  - ↳ Robotertrajektorien sind hochkorelliert
- ~~Batch~~ Batch-Lernen vs. Online-Lernen

  Online-Lernen ist häufig mit destruktiver Interferenz verbunden (man vergisst bereits gelerntes)

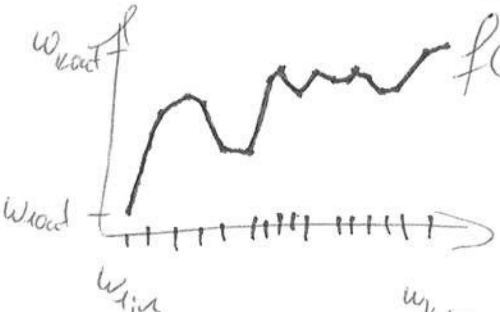
  ⇒ Online fähigen inkrementelle Lernverfahren, die mit korellierten Daten klar kommen.

  ↳ man braucht ein lokales Verfahren

  Bsp: Local linear map (LLM)

  Locally Weighted Projection Regression (LWPR)

X.1 Local Linear Map



- Menge von Knoten / lokalen Modellen
  - w_k^{in} - Prototyp im Eingaberaum
  - w_k^{out} - Ausgabe an der Stelle w_k^{in} $\left(g(w_k^{in}) \overset{!}{=} w_k^{out}\right)$
  - J_k - Jacobi-Matrix a.d.S. w_k^{in}

Autonomes Greifen

27.01.12

$$w_k = \exp\left(-\frac{\|x - w_k^{in}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sum_k w_k} \sum_k w_k \cdot \left(J_k \cdot (x - w_k^{in}) + w_k^{out}\right)$$

inkrementellen Lernen:

initialisierung: $k=0$ (leere Knotenmenge)

- Datenbeispiel (x, y)
- Berechne w_k
- Füge neuen Knoten ein mit $w_k^{in} = x$, $w^{out} = y$, versch Heuristiken für J (z.B. $J=0$) falls $\forall w_k < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \|x - w_k^{in}\| > d$
  d = Auflösung im Eingaberaum.
- Adaptation:

Gradientenabstieg auf Fehler $E_t = \|y_t - g(x_t)\|$

$$\Delta w_k^{in} = \mu_{in} \cdot w_k' \cdot (x - w_k^{in}) \quad VQ$$

$$\Delta w_k^{out} = \mu_{out} \cdot w_k' \cdot (y - g_k(x)) + J_k \Delta w_k^{in}$$

$$\Delta J_k = \mu_J \cdot w_k' \cdot \frac{(y - g_k(x)) \cdot (x - w_k^{in})^T}{\|x - w_k^{in}\|^2}$$

$$\left(w_k' = \frac{w_k}{\sum w_k}\right)$$

$$g_k(x) = J_k (x - w_k^{in}) + w_k^{out}$$

$$g(x) = \sum w_k' \cdot g_k(x)$$

Autonomes Greifen 27.01.12

BZ. Goal Babbling

naive zufällige Suche im Gelenkwinkelraum (q) exploriert nur einen Teil des Taskraumes (x)

=> Babbling im task-raum effektiver auch weit hochdimensionaler.

~~Wähle~~ Wähle zufällig ein Target x im Taskraum

Annahme: Vorwärtzkinematik / Endeff.-position bekannt.

Erzeuge zwischentargets x_t^* mittels linearer Interpolation von aktuelle Position zu x-target

Annahme: $\exists$ aktuellen Modell $g_t(\theta_t)$ für inv. kinem.

Für jedes zwischentarget x_t^* im Zeitschritt t.

- generiere Gelenkwinkel: $q_t = \underbrace{g(x_t^*, \theta_t)}_{\text{modell}} + \underbrace{\eta(x^*)}_{\text{Noise}}$

- bewerte die Bewegung:

$$w_t^{dir} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \sphericalangle\left(\overbrace{x_t^* - x_{t+1}^*}^{\text{gew. Richtung}}, \overbrace{x_t - x_{t-1}}^{\text{tats. Richtung}}\right)\right) \in [0, 1]$$

$$w_t^{eff} = \frac{\| x_t - x_{t-1} \|}{\| q_t - q_{t+1} \|}$$ - Effizienz der Bewegung (klein für Bewegung im Nullraum)

$w_t = w_t^{dir} \cdot w_t^{eff}$ -> zus. Gewichtung beim Training: $\eta \cdot w_k^i \cdot w_t$

~~Mach~~ Autonomen Greifen 27.01.12

- Random Walk führt wieder zum Abdriften vom typischen Arbeitsbereich
  - ↳ fahre mit Wahrsch. $p = 0{,}1$ nach erreichen von x_{target} in die Home Position (Interpoliert im Gelenkwinkel-Raum)
  - ↳ Exploration präferiert die Umgebung der Home-postur
- „Strukturierter Noise": erzeuge langfristig zufällige aber kurzfristig zielgerichtete explorationsbewegung

$$\eta(x_t^*) = A_t \cdot x^* + b^t \Rightarrow \text{langsam variierende lin. Fkt.}$$

Komponenten (e_t^i) von A_t und b_t machen „normalisierten Gaußschen" Random Walk

$$e_0^i \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \quad \delta_t^i = \mathcal{N}(0, \sigma_\Delta) \quad \sigma_\Delta \ll \sigma \ll 1$$

$$e_{t+1}^i = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_\Delta^2}} \left(e_t^i + \delta_t^i\right) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

(durch normalisierung)

Autonomes Greifen

03.02.12

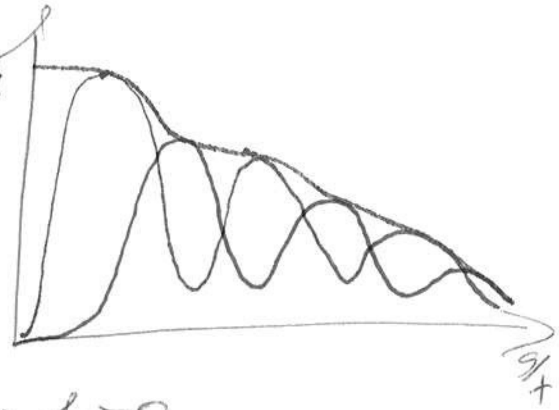
DMPs

$$\tau \cdot \dot{v} = \overbrace{K(g-x)}^{\text{Feder}} - \overbrace{Dv}^{\text{Dämpfer}} + \overbrace{f(s)}^{\text{ext. Kraft}}$$

g = goal
x = pos
v = geschw.
τ = Zeitkonst.

$$f(s) = \frac{\sum w_i \psi_i(s)}{\sum \psi_i(s)} \cdot s \cdot (g - x_0)$$

$$\psi_i(s) = \exp\left(-\frac{(s-c_i)^2}{\sigma_i^2}\right)$$



S – „Phase der Trajektorie zwischen $1 \to 0$

$\tau \dot{s} = -\alpha s \quad s_0 = 1$